# Inhaltsverzeichnis


**1 Photon vs Maxwell-Feld im Vakuum** **2**

1.1 Komplexe Notation . . . . . 2

1.2 Polarisationszustand . . . . . 2

1.3 Energiedichte des elektromagnetischen Feldes . . . . . 3

1.4 Gesamte Energie im Volumen V mit $V^{\frac{1}{3}} \gg \lambda$ . . . . . 3

1.5 Neuer Gedanke und Ausweg:
Wahrscheinlichkeitsinterpretation . . . . . 4

1.6 Abstrakter komplexer Zustandsvektor für *ein* Photon . . . . . 4

1.7 Andere spezielle Zustandsvektoren . . . . . 4

1.8 Superpositionsprinzip . . . . . 5

**2 Polarisationszustand eines Photons** **6**

2.1 Wahrscheinlichkeit für Durchlaß durch $\hat{e}_x$-Polarisationsfilter . . . . . 6

**3 Basistransformation und Spin eines Photons** **7**

3.1 Eigenschaft von $\hat{S}$ . . . . . 7

3.2 Eigenwerte des Spin-Operators $\hat{S}$ für ein Photon . . . . . 8

3.3 Eigenzustände des Rotationsoperators $\hat{\mathcal{R}}(\Theta)$ . . . . . 8

**4 Drehimpuls einer Lichtwelle** **9**

4.1 Impulsdichte . . . . . 9

4.2 Drehimpulsoperator . . . . . 10

4.3 Messung des magnetischen Dipolmomentes $\vec{\mu}$ . . . . . 10

4.4 Stern-Gerlach-Versuch . . . . . 11

4.5 Dichtematrix . . . . . 12

4.5.1 Allgemeine Definition der Dichtematrix . . . . . 14

# 1 Photon vs Maxwell-Feld im Vakuum

Elektromagnetische Felder $\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)$

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{B} + \text{rot } \vec{E} &= \vec{0} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

$\vec{E}$ ebene Welle:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= E_x(\vec{r},t)\hat{e}_x + E_y(\vec{r},t)\hat{e}_x \\ \vec{E}_x(\vec{r},t) &= E_{x_0} \cdot \cos(kz - \omega t + \alpha_x) \\ \vec{E}_y(\vec{r},t) &= E_{y_0} \cdot \cos(kz - \omega t + \alpha_y) \\ |k| = \frac{2\pi}{\lambda} &\equiv \text{Wellenzahl} \\ \lambda &\equiv \text{Wellenlänge} \\ c = \lambda \cdot \nu &\equiv \text{Lichtgeschwindigkeit} \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \\ \nu &\equiv \text{Frequenz} \\ \omega = 2\pi \cdot \nu &\equiv \text{Kreisfrequenz} \\ |k| = \frac{\omega}{c} & \end{aligned}$$

## 1.1 Komplexe Notation

$$\begin{aligned} \xi_{x,0} &= E_{x,0} \cdot \mathrm{e}^{i\alpha_x} \\ \xi_{y,0} &= E_{y,0} \cdot \mathrm{e}^{i\alpha_y} \\ E_x(\vec{r},t) &= \Re\left(\xi_{x,0} \cdot \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\right) \\ E_y(\vec{r},t) &= \Re(\xi_{x,0} \cdot \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} \end{aligned}$$

## 1.2 Polarisationszustand

$$\xi_{y,0} = 0 \quad \hat{=} \text{ Lichtwelle ist in } \hat{e}_x\text{-Richtung polarisiert} \tag{1}$$

$$\xi_{x,0} = 0 \quad \hat{=} \text{ Lichtwelle ist in } \hat{e}_y\text{-Richtung polarisiert} \tag{2}$$

$$\xi_{x,0} = \xi_{y,0} \quad \hat{=} \text{ Lichtwelle ist in } \tfrac{\hat{e}_x+\hat{e}_y}{\sqrt{2}}\text{-Richtung polarisiert} \tag{3}$$

$$\xi_{y,0} = \xi_{x,0}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \quad \hat{=} \text{ Lichtwelle ist rechtszirkular polarisiert} \tag{4}$$

$$\xi_{y,0} = \xi_{x,0}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \hat{=} \text{ Lichtwelle ist linkszirkular polarisiert} \tag{5}$$

*Bemerkung:* $\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$

## 1.3 Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\begin{aligned}
\epsilon(\vec{r},t) &= \frac{\epsilon_0}{2}\left[\left\langle \vec{E}(\vec{r},t),\vec{E}(\vec{r},t)\right\rangle + c^2\left\langle \vec{B}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)\right\rangle\right] \\
\partial\vec{B}(\vec{r},t) + \text{rot }\vec{E}(\vec{r},t) &= 0 \\
\Rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{1}{c}\hat{e}_z \times \vec{E}(\vec{r},t)(\text{ebene Welle}) \\
\epsilon(\vec{r},t) &= \epsilon_0\left\langle \vec{E}(\vec{r},t),\vec{E}(\vec{r},t)\right\rangle \\
& \quad \epsilon_0 \cdot |\xi_{x,0}| \cdot \cos^2(kz-\omega t+\alpha_x)
\end{aligned}$$

## 1.4 Gesamte Energie im Volumen V mit $V^{\frac{1}{3}} \gg \lambda$

$$\begin{aligned}
E_v = \int_V d^3r\epsilon(\vec{r},t) &= \epsilon_0 \cdot \frac{|V|}{2}\left(|\xi_{x_0}|^2 + |\xi_{y,0}|^2\right) \\
&= \epsilon_0 \cdot \frac{|V|}{2} \cdot \left|\vec{\xi_0}\right|^2
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{\epsilon_0}{2}\left|\xi_0\right|^2$ die mit der betrachteten Lichtwelle pro Volumen $V$ einhergehende Energie.

| | |
|---|---|
| Max Planck (1901) | Energie für *ein* Photon |
| Albert Einstein (1905) | $E = h\nu = \hbar\omega$ |

$\Rightarrow$ Für eine Anzahl $N$ Photonen im Volumen $V$ ist die Energie:

$$E_N = N \cdot h \cdot \nu = N \cdot \hbar\omega$$

Für *ein* Photon: $\frac{\epsilon_0}{2} \cdot |\xi_0|^2 \cdot \nu = \hbar\omega$

*Frage:*
Was geschieht mit einer 45° polarisierten Lichtwelle, die einen Polarisationsfilter durchläuft?

vorher: $\xi_{x,0} = \xi_{y,0} \equiv \xi_{\nu,0}$
nachher: $\xi_{\nu,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_{\nu,0}$
$\Rightarrow$ Energie der Lichtwelle ist nach dem Durchgang durch den Filter halbiert

In der Sprache von Planck bedeutet dies: Nur die Hälfte $\hat{=}\ \frac{N}{2}$ der Photonen aus dem ursprünglichen Lichtstrahl mit $N$ Photonen wird durchgelassen.

*Aber:*
Photonen sind identische Teilchen, alle Photonen sind im Polarisationsfilter identischen Bedingungen ausgesetzt.

## 1.5 Neuer Gedanke und Ausweg: Wahrscheinlichkeitsinterpretation

(Gilt für das betrachtete Experiment)
Jedes Photon hat Wahrscheinlichkeit 1/2 durchgelassen zu werden.

*Allgemein:*

$\frac{|\xi_{x,0}|^2}{|\xi_{x,0}|^2+|\xi_{x,0}|^2} \;\hat{=}\;$ Bruchteil der durch einen $\hat{e}_x$-Filter durchgehenden Energie

$\hat{=}$ Durchlaßwahrscheinlichkeit für linear polarisierte Lichtwelle

## 1.6 Abstrakter komplexer Zustandsvektor für *ein* Photon

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix}; \qquad \Psi_x = \sqrt{\frac{V}{\hbar\omega}\cdot\frac{\epsilon_0}{2}}\cdot\xi_{x,0}$$

$$\Psi_y = \sqrt{\frac{V}{\hbar\omega}\cdot\frac{\epsilon_0}{2}}\cdot\xi_{y,0}$$

$$\Rightarrow |\Psi_x|^2 + |\Psi_y|^2 = 1$$

Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ ist unabhängig vom betrachteten Volumen $V$.

Für 45°-Polarisation:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\alpha_x} \\ \mathrm{e}^{i\alpha_y} \end{pmatrix}$$

## 1.7 Andere spezielle Zustandsvektoren

$$\begin{aligned}
|x\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} && \hat{=}\ \hat{e}_x\text{-Polarisation} \\
|y\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \hat{=}\ \hat{e}_y\text{-Polarisation} \\
|R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} && \hat{=}\ \text{rechtszirkulare Polarisation} \\
|L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} && \hat{=}\ \text{linkzirkulare Polarisation}
\end{aligned}$$

$\underbrace{|\Psi\rangle}_{\text{"}Bra\text{"}} = (\Psi_x^*, \Psi_y^*)$ Zeilenvektor aus komplex konjugierten Elementen

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\langle\Phi|\Psi\rangle = \Phi_x^*\Psi_x &= \Phi_y^*\Psi_y \\
&= \langle\Psi|\Phi\rangle
\end{aligned}$$

Normierung: $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$

Es gilt für die betrachteten Zustandsvektoren

$$\begin{array}{lcccccc}
\langle x|x\rangle & & & = & 1 & = & \langle y|y\rangle \\
\langle x|y\rangle & & & = & 0 & = & \langle y|x\rangle \\
\langle R|R\rangle & = & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (-i)i & = & 1 & = & \langle R|R\rangle \\
\langle R|L\rangle & = & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (-i)(-i) & = & 0 & = & \langle L|R\rangle
\end{array}$$

Basissysteme: $\{|x\rangle, |y\rangle\}\ bzw.\ \{|L\rangle, |R\rangle\}$

## 1.8 Superpositionsprinzip

$$\begin{array}{rcl}
|\Psi\rangle & = & \Psi_x\,|x\rangle + \Psi_y\,|y\rangle \\
 & = & \Psi_L\,|L\rangle + \Psi_R\,|R\rangle \\
\text{Koeffizientenvergleich} \Rightarrow \Psi_L & = & \dfrac{\Psi_x + i\Psi_y}{\sqrt{2}} \\
\Psi_R & = & \dfrac{\Psi_x - i\Psi_y}{\sqrt{2}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_x + i\Psi_y)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_x - i\Psi_y)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix} = \Psi_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & = & \Psi_x \cdot |x\rangle + \Psi_y \cdot |y\rangle
\end{array}$$

Nach dem Gesagten ist:

$$\begin{array}{rcl}
\Psi_x & = & \langle x|\Psi\rangle \\
\Psi_y & = & \langle y|\Psi\rangle
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\Psi & = & |x\rangle\,\langle x|\,|\Psi\rangle + |y\rangle\,\langle y|\,|\Psi\rangle \\
 & = & |L\rangle\,\langle L|\,|\Psi\rangle + |R\rangle\,\langle R|\,|\Psi\rangle \\
1 & = & |x\rangle\,\langle x| + |y\rangle\,\langle y| \\
 & = & |L\rangle\,\langle L| + |R\rangle\,\langle R|
\end{array}$$

Jeder Polaristationszustand $|\Psi\rangle$ der betrachteten Lichtwelle ist koheränte Überlagerung von Basiszuständen etwa $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, $\{|L\rangle, |R\rangle\}$

# 2 Polarisationszustand eines Photons

"Ket" $|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix}$ "Bra" $\langle\Psi| = (\Psi_x^*, \Psi_y^*)$

$$\begin{aligned}
\Psi_x &= \sqrt{\frac{V}{\hbar\omega}\cdot\frac{\epsilon_0}{2}}\cdot\xi_x \\
\Psi_y &= \sqrt{\frac{V}{\hbar\omega}\cdot\frac{\epsilon_0}{2}}\cdot\xi_y \\
\vec{E}_{x,y}(\vec{r},t) &= E^0_{x,y}\cdot\cos[kz-\omega t+\alpha_{x,y}] \\
&= \Re\left[\xi_{x,y}\cdot \mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_x|^2+|\Psi_y|^2 = \langle\Psi|\Psi\rangle &= 1 \\
\text{Skalarprodukt: } \langle\Phi|\Psi\rangle &= \Phi_x^*\Psi_x+\Phi_y^*\Psi_y \\
\text{Superpositionsprinzip: } |\Psi\rangle &= \Psi_x\,|x\rangle+\Psi_y\,|y\rangle \\
& \quad |x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \Psi_L\,|L\rangle+\Psi_R\,|R\rangle \\
& \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\
& \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r},t) &= E_x\cdot\hat{e}_x+E_y\cdot\hat{e}_y \\
&= E_L\cdot\frac{\hat{e}_x+i\hat{e}_y}{\sqrt{2}}+E_R\cdot\frac{\hat{e}_x-i\hat{e}_y}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

## 2.1 Wahrscheinlichkeit für Durchlaß durch $\hat{e}_x$-Polarisationsfilter

$$\frac{|\xi_x|^2}{|\xi_x|^2+|\xi_y|^2} = \frac{|\Psi_x|^2}{|\Psi_x|^2+|\Psi_y|^2} = |\Psi_x|^2 = |\langle x|\Psi\rangle|^2$$

*Also:*

> $\langle x|\Psi\rangle$ ist Amplitude der in $\hat{e}_x$-Richtung polarisierten Komponente von $|\Psi\rangle$. Das Betragsquadrat $|\langle x|\Psi\rangle|^2$ ist entsprechende Durchlaßwahrscheinlichkeit.

*Allgemein:*

> Für einen optischen Polarisationsfilter, der nur Licht im Zustand $|\Phi\rangle$ durchläßt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Licht im Polarisationszustand $|\Psi\rangle$ durch den Filter geht zu $||\Phi\rangle\,\Psi|^2 \in [0,1]$ gegeben. Die entsprechende *komplexe* Wahrscheinlichkeitsamplitude ist $\langle\Phi|\Psi\rangle$

# 3 Basistransformation und Spin eines Photons

$$\begin{aligned}
\hat{e}'_x &= \cos\Theta\hat{e}_x + \sin\Theta\hat{e}_y \\
\hat{e}'_y &= -\sin\Theta\hat{e}_x + \cos\Theta\hat{e}_y \\
\hat{e}_x &= \cos\Theta\hat{e}'_x - \sin\Theta\hat{e}'_y \\
\hat{e}_y &= \sin\Theta\hat{e}'_x + \cos\Theta\hat{e}'_y
\end{aligned}$$

Bzgl. der rotierten Basis $\{\hat{e}'_x, \hat{e}'_y\}$ folgt:

$$\left.\begin{array}{lllll} |\Psi\rangle & = & \Psi'_x\,|x'\rangle & + & \Psi'_y\,|y'\rangle \\ & = & \Psi_x\,|x\rangle & + & \Psi_y\,|y\rangle \end{array}\right\} \begin{array}{lllll} |x'\rangle & = & \cos\Theta\,|x\rangle & + & \sin\Theta\,|y\rangle \\ & = & -\sin\Theta\,|x\rangle & + & \cos\Theta\,|y\rangle \end{array}$$

$$\Rightarrow \left( \; \Psi'_x//\Psi'_y \; \right) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix}$$

Komponenten $\Psi'_x$ und $\Psi'_y$ von $|\Psi'\rangle$ in der rotierten Basis: $|x'\rangle$ und $|y'\rangle$
Umgekehrt läßt sich def Standpunkt vertreten, daß dem Zustand $|\Psi\rangle$ ein neuer Zustand $|\Psi'\rangle$ zugeordnet wird:

$$|\Psi'\rangle = \mathcal{R}(\Theta)\,|\Psi\rangle$$

$$\begin{aligned}
\text{Nach dem Gesagten: } \mathcal{R}(\Theta) &= \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \\
&= cos\Theta \cdot \hat{1} + i\sin\Theta \cdot \hat{S}
\end{aligned}$$

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bezogen auf die Basis } \{|x\rangle\,, |y\rangle\}$$

## 3.1 Eigenschaft von $\hat{S}$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}\cdot\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{1}$$

## 3.2 Eigenwerte des Spin-Operators $\hat{S}$ für ein Photon

$$\hat{S}\cdot|\chi\rangle = \lambda\,|\chi\rangle \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
|\chi\rangle &= \hat{1}\,|chi\rangle = \hat{S}^2\,|\chi\rangle = \hat{S}(\hat{S}\,|\chi\rangle)\\
&= \hat{S}(\lambda\,|\chi\rangle) = \lambda(\hat{S}\,|\chi\rangle) = \lambda^2\,|\chi\rangle\\
\Rightarrow \lambda^2 &= 1 \qquad \text{also: } \lambda\in\{-1,1\}\\
\hat{S}\,|R\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = |R\rangle\\
\hat{S}\,|L\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ i\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = -\,|L\rangle
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\text{Also: } \hat{S}\,|R\rangle &= |R\rangle\\ \hat{S}\,|L\rangle &= -\,|L\rangle\end{aligned}\right\} \qquad \begin{array}{l}\text{Eigenwerte von } \hat{S} \text{ sind } +1 \text{ bzw. -1 zum}\\ \text{Eigenzustand } |R\rangle \text{ bzw. } |L\rangle\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S} &= |R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|\\
\hat{S}\,|R\rangle &= (|R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|)\,|R\rangle\\
&= |R\rangle\underbrace{\langle R|R\rangle}_{=1} - |L\rangle\underbrace{\langle L|R\rangle}_{=0} = |R\rangle\\
\hat{S}\,|L\rangle &= (|R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|)\,|L\rangle\\
&= |R\rangle\underbrace{\langle R|L\rangle}_{=0} - |L\rangle\underbrace{\langle L|L\rangle}_{=1} = -\,|L\rangle
\end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle\langle\Psi| &= \begin{pmatrix}\Phi_x\\ \Phi_y\end{pmatrix}\otimes(\Psi_x^*,\Psi_y^*)\\
&= \begin{pmatrix}\Phi_x\Psi_x^* & \Phi_x\Psi_y^*\\ \Phi_y\Psi_x^* & \Phi_y\Psi_y^*\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix}\Phi_x\\ \Phi_y\end{pmatrix} \qquad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix}\Psi_x\\ \Psi_y\end{pmatrix} \qquad \langle\Phi| = \begin{pmatrix}\Phi_x^*\\ \Phi_y^*\end{pmatrix} \qquad \langle\Psi| = \begin{pmatrix}\Psi_x^*\\ \Psi_y^*\end{pmatrix}$$

## 3.3 Eigenzustände des Rotationsoperators $\hat{\mathcal{R}}(\Theta)$

$$\hat{\mathcal{R}}(\Theta) = \cos\Theta\cdot\hat{1} + i\sin\Theta\cdot\hat{S}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}(\Theta)\,|\chi\rangle &= \lambda_\Theta\,|\chi\rangle\\
\hat{\mathcal{R}}(\Theta)\,|R\rangle &= (\cos\Theta\hat{1} + i\sin\Theta\cdot\hat{S}\,|R\rangle\\
&= (\cos\Theta + i\sin\Theta)\,|R\rangle = \mathrm{e}^{i\Theta}\,|R\rangle\\
\hat{\mathcal{R}}(\Theta)\,|L\rangle &= (\cos\Theta\hat{1} + i\sin\Theta\cdot\hat{S}\,|L\rangle\\
&= (\cos\Theta - i\sin\Theta)\,|L\rangle = \mathrm{e}^{i\Theta}\,|L\rangle
\end{aligned}$$

Also ist rechts- bzw. linkspolarisierter Zustand, $|R\rangle$ bzw. $|L\rangle$. Eigenzustand des Rotationsoperators $\hat{\mathcal{R}}(\Theta)$ zum Eigenwert $\mathrm{e}^{i\Theta}$ bzw. $\mathrm{e}^{-i\Theta}$ Nach dem Gesagten:

$$\hat{\mathcal{R}}\mathrm{e}^{i\Theta} \cdot |R\rangle\langle R| + \mathrm{e}^{-i\Theta} \cdot |L\rangle\langle L|$$

# 4 Drehimpuls einer Lichtwelle

## 4.1 Impulsdichte

$$\begin{aligned}
\vec{g}(\vec{r},t) &= \left[\frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)\right]\frac{1}{c^2} \qquad\qquad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0 \\
\epsilon_0\vec{E}(\vec{r},t) \times \text{rot } \vec{A}(\vec{r},t) & \\
\vec{B}_\alpha(\vec{r},t) &= [\text{rot } \vec{A}(\vec{r},t)]_\alpha = [\nabla \times \vec{A}(\vec{r},t)]_\alpha \\
&= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha_\beta}\vec{A}_\gamma(\vec{r},t) \\
\vec{E}_\alpha &= -\frac{\partial}{\partial dt}\vec{A}_\gamma(\vec{r},t) \qquad \text{für (ebene) Welle im Vakuum}
\end{aligned}$$

Drehimpuls eines Lichtwellenpakets im Volumen $V$

$$\vec{L} = \int_V d^3r\vec{r}\times\vec{g}(\vec{r},t) \overset{\text{part. Int.}}{=} -\epsilon_0\int d^3r\left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{A}(\vec{r},t)\right]_\alpha \underbrace{-\epsilon_0\int d^3rE_\gamma(\vec{r},t)(\vec{r}\times\nabla)_\alpha A_\gamma(\vec{r},t)}_{o(\text{small})}$$

"Ebene" Welle, die sich entlang de $\hat{e}_z$-Richtung ausbreitet:

$$\begin{aligned}
A_x(\vec{r},t) &= \frac{1}{\omega}E_x^0 \cdot \sin(kz - \omega t + \alpha_x) \\
A_y(\vec{r},t) &= -\frac{1}{\omega}E_y^0 \cdot \sin(kz - \omega t + \alpha_y)
\end{aligned}$$

Dies gilt mit Ausnahme der Randzone des Wellenpakets, wo $E_{x,y}^0$ klein werden.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow L_z &= -\epsilon_0\int_V d^3r\,[E_x(\vec{r},t)A_y(\vec{r},t) - E_y(\vec{r},t)A_x(\vec{r},t)] \\
&\quad -\epsilon_0 \underbrace{\int_V d^3rE_\gamma(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial\Phi}A_\gamma(\vec{r},t)}_{o(\text{small}),\text{ da } \frac{\partial}{\partial\Phi}A_\gamma \text{im Innern des Volumens } V \text{ verschwindet!}}
\end{aligned}$$

Im Vergleich zum Beitrag des *ersten* Terms ist Beitrag des *zweiten* Terms für $V^{\frac{1}{3}} \gg \lambda$ verschwindend klein!

$$L_z = \frac{\epsilon_0}{\omega}\int_V d^3rE_x^0E_y^0 \cdot \underbrace{\begin{aligned}[t][&-\cos(kz-\omega t+\alpha_y)\cdot\sin(kz-\omega t+\alpha_x) \\ &+\cos(kz-\omega t+\alpha_x)\cdot\sin(kz-\omega t+\alpha_y)]\end{aligned}}_{=\ \sin[(kx-\omega t+\alpha_y)-(kx-\omega t+\alpha_x)]\ =\ \sin(\alpha_y-\alpha_x)}$$

$$
\begin{aligned}
L_z &= \frac{\epsilon_0}{\omega} V \cdot E_x^0 \cdot E_y^0 \cdot \sin(\alpha_y - \alpha_x) \\
&= \frac{\epsilon_0}{\omega} V \cdot E_x^0 \cdot E_y^0 \cdot \frac{1}{2i} \left[\mathrm{e}^{i\alpha_y}\mathrm{e}^{-i\alpha_x} - \mathrm{e}^{-i\alpha_y}\mathrm{e}^{i\alpha_x}\right] \\
\xi_{x,y} &= E_{x,y}\mathrm{e}^{i\alpha_{x,y}} \\
\Rightarrow L_z &= \frac{V\epsilon_0}{2i\omega}\left(\xi_x^*\xi_y - \xi_x\xi_y^*\right) \\
&= \frac{V_0\epsilon_0}{2\omega}\left(\left|\frac{\xi_x - i\xi_y}{\sqrt{2}}\right| - \left|\frac{\xi_x + i\xi_y}{\sqrt{2}}\right|\right) \\
&= \hbar\left[\left|\frac{\Psi_x - i\Psi_y}{\sqrt{2}}\right|^2 - \left|\frac{\Psi_x + i\Psi_y}{\sqrt{2}}\right|^2\right] \\
&= \hbar\left(\left|\langle R|\Psi\rangle\right|^2 - \left|\langle L|R\rangle\right|^2\right) \\
L_z &= \hbar\left\langle\Psi\right|\left(|R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|\right)\left|\Psi\right\rangle \qquad \left|\langle R|\Psi\rangle\right|^2 = \langle\Psi|R\rangle\langle R|\Psi\rangle
\end{aligned}
$$

### 4.2 Drehimpulsoperator

$$\hat{L}_z = \hbar \cdot \hat{S}$$

### 4.3 Messung des magnetischen Dipolmomentes $\vec{\mu}$

*Wechselwirkungsenergie:* $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

$$
\begin{aligned}
\textit{Kraft: } \vec{F} &= -\nabla\left(\vec{\mu} \cdot \vec{B}\right) \qquad \vec{B} \parallel \hat{e}_z \\
\vec{F} &= \mu_z \cdot \vec{B} \qquad \text{Annahme: } \frac{\partial B_z}{\partial z} \gg \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_z}{\partial y} \\
\Rightarrow \vec{F} &= F_z \cdot \hat{e}_z \quad \text{mit } F_z = \mu_z \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Abbildung 1: Versuchanordnung Stern-Gerlach-Experiment

Der Spin $s_z$ des Elektrons ist quantisiert und kann nur zwei Werte annehmen: $s_z = \pm\frac{\hbar}{2}$

Baue Filter:

Abbildung 2: Spinfilter

Analogie zu polarisiertem Licht:

- Nach y-Filter: $\vec{E}^0 = E_0 \hat{e}_y = E^0 \left| y \right\rangle$
  Nun ist

$$\begin{aligned} \hat{e}_y &= (\hat{e}'_x + \hat{e}'_y)\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \left| y \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| x' \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| y' \right\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = E^0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\left| x' \right\rangle + \left| y' \right\rangle)$$

- Nach dem 45°-Filter: $\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left| x' \right\rangle$ Nun ist

$$\left| x' \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| x \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| y \right\rangle$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{E^0}{\sqrt{2}} (\left| x \right\rangle + \left| y \right\rangle)$$

- Nach dem x-Filter: $\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \left| x \right\rangle$

## 4.4 Stern-Gerlach-Versuch

$$\begin{aligned} \left| x, \uparrow \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\left| z, \uparrow \right\rangle + \left| z, \downarrow \right\rangle) \\ \left| x, \downarrow \right\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\left| z, \uparrow \right\rangle + \left| z, \downarrow \right\rangle) \\ \left| y' \right\rangle &= \frac{-\left| x \right\rangle + \left| y \right\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Abbildung 3: Koordinatensystem

Identifiziere

$$\begin{aligned} \left| x \right\rangle &\rightarrow \left| z, \uparrow \right\rangle \\ \left| y \right\rangle &\rightarrow \left| z, \downarrow \right\rangle \\ \left| x' \right\rangle &\rightarrow \left| z, \uparrow \right\rangle \\ \left| y' \right\rangle &\rightarrow \left| z, \downarrow \right\rangle \end{aligned}$$

Analyse des 3fachen Stern-Gerlach-Experiments:

- nach dem 1. Filter: $\left| z, \uparrow \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\left| x, \uparrow \right\rangle - \left| x, \downarrow \right\rangle)$
- nach dem SG $x, \uparrow$-Filter: $\frac{1}{\sqrt{2}} \left| x, \uparrow \right\rangle = \frac{1}{2} (\left| z, \uparrow \right\rangle + \left| z, \downarrow \right\rangle)$

Wie beschreibt man die $y$-Komponente?

$$\begin{array}{rcccl} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & = & |R\rangle & \rightarrow & |y,\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} & = & |L\rangle & \rightarrow & |y,\downarrow\rangle \end{array}$$

$\Rightarrow$ Für die Beschreibung des Spins des Elektrons brauchen wir einen zweidimensionalen, komplexen Vektorraum.

## 4.5 Dichtematrix

$$|x,\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|z,\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|z,\downarrow\rangle$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß das $|x,\uparrow\rangle$ im Zustand $|z,\uparrow\rangle$ angetroffen wird ist

$$W_\uparrow = |\langle z,\uparrow|x,\uparrow\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\langle z,\uparrow|z,\uparrow\rangle}_{=1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\langle z,\uparrow|z,\downarrow\rangle}_{=0}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Analog hat $|z,\downarrow\rangle$ die Wahrscheinlichkeit

$$W_\downarrow = |\langle z,\downarrow|x,\uparrow\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

*Frage:*

> Was ist der Unterschied zu einem Teilchenstrahl, der zu 50% aus $|z,\uparrow\rangle$-Teilchen und zu 50% aus $|z,\downarrow\rangle$-Teilchen besteht?

Abbildung 4: Filteranordnungen

Die Strahlen sind unterscheidbar!
Die Wahrscheinlichkeit, daß Licht durch einen $|\Phi\rangle$-Filter hindurchkommt ist

$$W = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = \langle\Phi|\Psi\rangle^* \langle\Phi|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle \langle\Phi|\Psi\rangle$$

Definiere *Filteroperator* $F_\Phi = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ (charakterisiert Filter)

$$W = \langle\Psi| F_\Phi |Psi\rangle$$

Definiere *Dichtematrix* $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ (charakterisiert Strahl)

Behauptung: $W = \mathrm{Sp}\,\{\rho\cdot F_\Phi\}$
Spur $\mathrm{Sp}\,\{A\} = \sum_n \langle n| A |n\rangle$ $\quad$ $(= \langle x| A |x\rangle + \langle y| A |y\rangle$ in 2 Dimensionen)

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,\{\rho\cdot F_\Phi\} &= \sum_n \langle n|\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle\langle\Phi|n\rangle \\ &= \sum_n \langle\Psi|\Phi\rangle\langle\Phi|\underbrace{n\rangle\langle n}_{=1}|\Psi\rangle \qquad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1 \text{ (Vollständigkeitsrelation)} \\ &= \langle\Psi|\Phi\rangle\langle\Phi|\mathbf{1}|\Psi\rangle \\ &= \langle\Psi|\Phi\rangle\langle\Phi|\Psi\rangle = W \end{aligned}$$

*Beispiel:*
Wir schicken $x$-polarisiertes Licht durch einen $45°$-Filter

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |45°\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. $\langle 45°|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad W = |\langle 45°|x\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ item $\rho = |x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} F_\Phi = |45°\rangle\langle 45°| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1,1) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rho \cdot F_\Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \mathrm{Sp}\ \{\rho \cdot F_\Phi\} = \frac{1}{2}$$

Strahl bestehe aus einem Gemisch zu einem Anteil $p_1$ aus $|\Psi_1\rangle$-Teilchen und zu einem Anteil $p_2$ aus $|\Psi_2\rangle$-Teilchen.

$$\begin{aligned} W &= p_1 \cdot |\langle\Phi|\Psi_1\rangle|^2 + p_2 \cdot |\langle\Phi|\Psi_2\rangle|^2 \\ &= p_1 \cdot \langle\Psi_1| F_\Phi |\Psi_1\rangle + p_2 \cdot \langle\Psi_2| F_\Phi |\Psi_2\rangle \\ \rho &= p_1 |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + p_1 |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| \\ W &= \mathrm{Sp}\ \{\rho \cdot F_\Phi\} \end{aligned}$$

*Beispiel:* 40% $x$-polarisierter Lichtstrahl, 60% $y$-polarisierter Lichtstrahl

1. $W_x = \frac{1}{2}$ $\qquad W_y = |45°|\, y = \frac{1}{2}$
   $W = 0,4 \cdot W_x + 0,6 \cdot W_y = \frac{1}{2}$

2. $\rho = 0,4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0,6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \rho \cdot F_\Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Sp}\ \{\rho \cdot F_\Phi\} = \frac{1}{2}$$

### 4.5.1 Allgemeine Definition der Dichtematrix

$$\rho = \sum p_1 \left|\Psi_1\right\rangle \left\langle\Psi_1\right| \qquad \sum_i p_1 = 1$$

*Eigenschaften der Dichtematrix*

1. Sp $\{\rho\} = 1$
2. Wenn ein reiner Zustand vorliegt, dann ist Sp $\{\rho^2\} = 1$ und $\rho^2 = \rho$.
   Wenn ein gemischter Zustand vorliegt, dann ist Sp $\{\rho^2\} < 1$ und $\rho^2 \neq \rho$.

reiner Zustand:

$$\begin{aligned}
\text{Sp } \rho &= 1 \\
\text{Sp } \rho &= \sum_i \sum_n p_i \langle n|\Psi_i\rangle \langle\Psi_i|n\rangle \\
&= \sum_i p_i \sum_n \langle\Psi_i|n\rangle \langle n|\Psi_i\rangle \\
&= \sum_i p_i \langle\Psi_i|\Psi_i\rangle = \sum_i p_i = 1
\end{aligned}$$

gemischter Zustand:

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \sum_{i,j} p_i p_j \left|\Psi_i\right\rangle \langle\Psi_i|\Psi_j\rangle \left\langle\Psi_i\right| \\
\text{Sp } \{\rho^2\} &= \sum_n \sum_{i,j} p_i p_j \langle n|\Psi_i\rangle \langle\Psi_i|\Psi_j\rangle \langle\Psi_i|n\rangle \\
&= \sum_{i,j} p_i p_j \langle\Psi_i|\Psi_j\rangle \langle\Psi_j|\Psi_i\rangle \\
&= \sum_{i,j} p_i p_j \left|\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle\right|^2 \\
\text{Sp } \{\rho^2\} &< \sum_{i,j} p_i p_j = 1
\end{aligned}$$

# Index


Basissysteme . . . . . . 5
Dichtematrix . . . . . . 12, 14
Drehimpuls . . . . . . 9
Drehimpulsoperator . . . . . . 10
Filteroperator . . . . . . 12
Normierung . . . . . . 5
Skalarprodukt . . . . . . 4
Wechselwirkungsenergie . . . . . . 10